Universidad Autónoma de Madrid
Lógica Matemática Hoja 6

1. *Equivalencias sintáctico-semánticas de la lógica de primer orden.*

   Sea L un lenguaje, T, T_1 y T_2 L-teorías y $F \in Enun(L)$. En cada uno de los siguientes casos demuestra la equivalencia entre (a_i) y (b_i) para $i = 1, \ldots, 7$.

Propiedad sintáctica	*Propiedad semántica*
(a_1) $T \vdash F$ (F es un teorema de T)	(b_1) $T \models F$ (F es una consecuencia semántica de T).
(a_2) Existe $T_0 \subseteq T$ finito tal que $T_0 \vdash F$	(b_2) existe $T_0 \subseteq T$ finito tal que $T_0 \models F$.
(a_3) Existe $G \in Enun(L)$ tal que $T \not\vdash G$	(b_3) existe un modelo de T.
(a_4) Todo $T_0 \subseteq T$ finito es coherente	(b_4) todo $T_0 \subseteq T$ finito tiene un modelo.
(a_5) T es completa	(b_5) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$.
(a_6) T_1 y T_2 tienen los mismos teoremas	(b_6) T_1 y T_2 son equivalentes.
(a_7) T completa y coherente	(b_7) existe L-estructura $\mathcal{A}$ tal que T es equivalente a $Te(\mathcal{A})$.

2. Sean L un lenguaje. Sean $T = \{F_i \in Enun(L) \mid i \in I\}$ y $\{G_j \in Enun(L) \mid j \in J\}$ conjuntos de enunciados de L con T coherente. Supón que para cada L-estructura $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models F_i$ para toda $i \in I$ si y solo si $\mathcal{A} \models G_j$ para algún $j \in J$, que abreviamos es escribiendo:

$$\models \bigwedge_{i \in I} F_i \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} G_j.$$

   Demuestra que existe conjuntos finitos $I_0 \subseteq I$ y $J_0 \subseteq J$ tales que

$$\models \bigwedge_{i \in I_0} F_i \leftrightarrow \bigvee_{j \in J_0} G_j.$$

3. Sea $\mathbb{X}_L$ el espacio topológico definido en el ejercicio 3 de la hoja 5. Demuestra que para cualquier $T \in \mathbb{X}_L$, T es finitamente axiomatizable si y solamente si T es un punto aislado del espacio $\mathbb{X}_L$.

4. Sea L un lenguaje. Sea $\mathbb{P}$ una propiedad sobre L-estructuras. Demuestra lo siguiente:

   Las propiedades $\mathbb{P}$ y "no $\mathbb{P}$" son axiomatizables si y solamente si $\mathbb{P}$ es finitamente axiomatizable.

5. Sea $\mathcal{K}$ el cuerpo de los números algebraicos (aquellos números complejos que son raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$). Demuestra que existe un cuerpo $\mathcal{A}$ elementalmente equivalente a $\mathcal{K}$ que contiene elementos trascendentes.

   Indicación: Considera la teoría $T' = Te(\mathcal{K}) \cup \{p(c) \neq 0 : p(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}\}$ en el lenguaje $L' = L \cup \{c\}$, donde $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ es el lenguaje de cuerpos y c es una constante nueva.

6. Sea $L = \{<\}$ el lenguaje de conjuntos ordenados. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ el buen orden de los naturales. Demuestra que existe una L–estructura $\mathcal{A}$ elementalmente equivalente a $\mathcal{N}$, con una cadena infinita descendente de elementos de A.

7. Se consideran el lenguaje de grupos $L = \{\cdot, 1\}$ y la L–estructura $\mathcal{A}$ que tiene como universo

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, n > 0\}.$$

   (A es el grupo de las raíces de la unidad en $\mathbb{C}$.)

   Demuestra que existe un grupo $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, 1 \rangle$ tal que $\mathcal{G} \equiv \mathcal{A}$ y G tiene elementos de orden infinito.

8. Sea L lenguaje de anillos. Demuestra la existencia de una L-estructura $\mathcal{A}$ elementalmente equivalente a $\mathbb{Z}$ con elementos $a_i \in A$, para todo $i \in \mathbb{N}$, tales que a_{i+1} divide a a_i pero a_i no divide a a_{i+1}. Concluye que la clase de dominios de ideales principales no es elemental.